Übungsblatt02 - Es gibt unentscheidbare Sprachen - Musterlösung

TH Mittelhessen, FB MNI, Berechenbarkeit und Komplexität, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Es sei Σ eine endliche Zeichenmenge mit wenigstens zwei Zeichen.

Bitte zeigen Sie, dass es Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ gibt, die von keiner Turingmaschine erkannt werden können.

Hinweis für das Vorgehen:

a.) Zeigen Sie, dass die Menge aller Turingmaschinen (codiert über $\{0, 1\}$ oder einem anderen fixen Alphabet) abzählbar unendlich ist.

b.) Zeigen Sie, dass die Menge aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ überabzählbar unendlich ist.

c.) Vergleichen Sie beides und leiten Sie die Aussage her.

Lösung Aufgabe 1:

a.) Jede Turingmaschine T werde gemäß einem beliebigen Codierungsalgorithmus über $\{0, 1\}$ codiert.

Dann ist die Codierung $C(T)$ jeder Turingmaschine endlich lang, d.h., $C(T) \in \{0, 1\}^*$ für jede Turingmaschine T.

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{0, 1\}^n$ endlich ist, ist auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller Turingmaschinen, deren Codierung die Länge n hat, endlich.

Die Menge aller Turingmaschinen kann also aufgezählt werden, indem man für $i = 1, 2, 3, ...$ die Elemente der Menge $\{0, 1\}^n$, die Codierungen von Turingmaschinen sind, in einer geeigneten Reihenfolge (z.B. der Größe nach, wenn man die Codierung als Binärzahl liest) ausgibt.

b.) Σ^* ist abzählbar unendlich. Denn man kann Σ^* z.B. aufzählen, indem man erst Σ, dann Σ^2, dann Σ^3 etc. aufzählt.

Sei eine Aufzählung von Σ^* gegeben. Dann kann man jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ mit einer 0-1-Folge $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ identifizieren. Das k-te Folgenglied L_k gibt an ob das k-te Element der Aufzählung ein Element von L ist.

Diese Identifikation ist eine injektive und surjektive Abbildung, wie man sich leicht überzeugt.

Die Menge der 0-1-Folgen $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist überabzählbar, denn fasst man jede Folge als die Nachkommastellen der Zahl $0, L_1 L_2 L_3 ... \in \mathbb{R}$ auf, sieht man, dass es ebenso viele solche Folgen wie Zahlen im Intervall $[0; 1]$ gibt. Dieses Intervall ist überabzählbar, wie in der Vorlesung mit dem Cantor'schen Diagonalisierungsverfahren gezeigt wurde.

c.) Da es nur abzählbar unendlich viele Turingmaschinen, aber überabzählbar unendlich viele Sprachen gibt, gibt es Sprachen, die von keiner Turingmaschine erkannt werden.

Aufgabe 2

Bitte geben Sie für ein Alphabet Σ Ihrer Wahl eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ an, die nicht von einer Turingmaschine erkannt wird.

Hinweis: Diese Aufgabe ist, wenn Sie nicht schon eine Lösung kennen, oder eine nachlesen, kaum zu lösen. Bitte probieren Sie es aber trotzdem. Denn die Irrwege hier sind das Ziel, sie liefern Erkenntnisgewinn für Aufgabe 3 :).

Lösung Aufgabe 2:

Oft wird versucht, eine der Sprachen explizit zu beschreiben, deren Existenz in Aufgabe 1 nachgewiesen wurde. Das funktioniert normalerweise nicht, denn wenn man eine Sprache beschreibt, hat man oft schon den Algorithmus, um sie zu erkennen - und meiste sogar den Algorithmus, um sie zu entscheiden.

In der Vorlesung werden wir Sprachen kennenlernen, die unentscheidbar sind, und auch solche, die noch nicht einmal erkannt werden können.

(Das ist eine gute Gelegenheit, sich noch einmal den Unterschied zwischen „entscheiden“ und „erkennen“ einer Sprache ins Gedächtnis zu holen).

Aufgabe 3

Es sei wieder Σ ein endliches Alphabet. Bitte zeigen Sie, dass es Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ gibt, die nicht von einem endlichen Text beschrieben werden können, auch, wenn in diesem Text alle Zeichen vorkommen dürfen, die bis zum heutigen Tag jemals geschrieben worden sind.

Anmerkung: Mit dieser Aufgabe verletzen wir natürlich Wittgensteins berühmt gewordenen Hinweis aus dem tractatus logico-philosoficus von 1921:
„Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen“. :)

Lösung Aufgabe 3:

Es sei Γ die Menge der Zeichen, die bis heute jemals geschrieben wurden. Γ ist endlich.

Die Beschreibung einer Sprache ist ein Element in Γ^*. Die Menge Γ^* ist, als Menge der endlichen Folgen über einem endlichen Alphabet, abzählbar unendlich.

Die Menge $\{L \subseteq \Sigma^*\}$, also die Potenzmenge von Σ^*, ist aber überabzählbar, wie in Aufgabe 1.b. gezeigt wurde.

Somit gibt es Sprachen, die nicht durch einen endlichen Text mit Buchstaben aus Γ beschrieben werden können.